Korollar: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Longrightarrow (a_k) \text{ Nullfolge.}}$!

„$\Longleftarrow$" falsch: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$!

Bew: wähle $p = 1$ in der Cauchy-Bdg. //

$$\Longrightarrow \Big| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \Big| = |a_{n+1}| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$\square$

Der Satz (6.3) über monotone und beschränkte reelle Folgen liefert

Satz 7.2: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reell mit $\boxed{a_k \geq 0}$ für fast alle k. Dann gilt:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Longleftrightarrow \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt}}$$

Für Reihen existieren viele subtile Konvergenzaussagen, die sich nicht sofort wie Satz 7.1 + 7.2 „auf Folgen" reduzieren lassen.

Wie verhält sich z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$?

$\boxed{\text{Satz 7.3}}$ (von Leibniz) → p. 202!

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine alternierende reelle Folge, d.h.

$$\boxed{a_{k+1} \cdot a_k \leq 0}$$

Ist dann $(|a_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

s. nächst Seite („alternative Version")

ü (Blatt 7, A3)

$\boxed{\text{alternative Version}}$: $b_k \geq 0$ und (b_k) <u>monotone</u> <u>Nullfolge</u> $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k \quad \underline{\text{konvergent}}$$

(und dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$!)

(<u>folgt aus 7.4</u>)

<u>Bew von Satz 7.3</u> : Wir setzen $(n \in \mathbb{N})$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k ,$$

$$U_n := \sum_{k=1}^{2n} a_k ,$$

$$V_n := \sum_{k=1}^{2n-1} a_k , \quad n \in \mathbb{N},$$

und zeigen <u>Konvergenz</u> von $(U_n), (V_n)$

mit gleichem Limes. Dann folgt die Konvergenz von (S_n) (wieso?)

O. E. : $a_1 \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{2k} \geq 0, \\ a_{2k-1} \leq 0 \end{cases}$

① (U_n) fällt:

$$U_{n+1} = U_n + a_{2n+1} + a_{2n+2} =$$

$$U_n + \underbrace{|a_{2n+2}| - |a_{2n+1}|}_{\leq 0 \text{ nach Vor}} \leq U_n$$

② (V_n) wächst: —//—

③ (U_n) nach unten beschränkt:

$$U_n = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\geq 0} + \underbrace{a_4 + a_5}_{\geq 0}$$

$$\ldots + \underbrace{\left(a_{2n-2} + a_{2n-1}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{U_n \geq a_1}$$

④ (V_n) nach oben beschränkt (≤ 0)

. . . .

①-④ $\Longrightarrow$ Konvergenz von $(U_n), (V_n)$;

⑤ $U_n - V_n = a_{2n} \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow$ Limiten sind gleich.

$\square$

Verschärfung:

$\boxed{\text{Satz 7.4}}$ (Kriterium von Abel)

Seien (a_k), (b_k) reelle Folgen mit

1.) $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt

2.) (a_k) ist monoton fallende Nullfolge

(speziell also $a_k \geq 0$)

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Spezialfall: (Leibniz)

$$\boxed{b_k := (-1)^k, \quad a_k \downarrow 0}$$

(monoton fallende Nullfolge)

<u>Beweis mit Cauchy</u> : für $n \geq m+1$

ist $\left(S_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \right)$ $\quad b_k = S_k - S_{k-1}$

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \ldots\ldots =$$

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} \underbrace{(a_k - a_{k+1})}_{\geq 0} S_k + a_n S_n - a_{m+1} S_m ;$$

Sei $K := \sup_{\ell} |S_\ell| < \infty \Longrightarrow$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k \right| \leq K \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})$$

$$+ a_n K + a_{m+1} K$$

$$= K(a_{m+1} - a_n) + a_n K + a_{m+1} K$$

$$= 2 K a_{m+1} \qquad \square$$

überraschend klingt

$\boxed{\text{Satz 7.5}}$ (Kondensationskriterium)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, $a_k \geq 0$.

Dann gilt:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\{\begin{array}{l}\text{konvergent}\\[1em] \text{bestimmt divergent}\end{array}\right\} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} \left\{\cdots\cdots\right\}}$$

(Rechts werden viel weniger Reihenglieder gezählt, dafür aber mit hohen Gewichten.)

Beweis: Übungsaufgabe 5/Blatt 6

$\longrightarrow$ Skript p. 86

Anwendungen:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \; ?}$$

(1.) Sei $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

beachte: $\left(\frac{1}{k^r}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ fällt monoton. **Also:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} < \infty \underset{\text{Satz 7.5}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2^k}\right)^r < \infty \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\right]^k < \infty \underset{\text{„geom. Reihe"}}{\Longleftrightarrow}$$

$$[\ldots] < 1 \Longleftrightarrow$$

$$2^{1-r} < 1 \Longleftrightarrow \boxed{r > 1}$$

(2) Sei (b_k) monoton fallend, $b_k \geq 0$. Dann gilt:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} b_k/k \text{ konvergent} \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_{2^k} \text{ konvergent}}$$

Beweis: Satz mit $a_k := b_k/k$. $\square$

Es existieren viele weitere Kriterien, die Vorzeichen, Monotonie, etc. ausnutzen.

Wir gehen stattdessen über zu einem <u>sehr starken</u> <u>Konvergenzbegriff</u>

Def. 7.2 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe in

$\mathbb{C}$.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $:\Longleftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

b) Sei $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann

heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ eine Umordnung

von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bem: ① ! $\boxed{\text{absolute Konvergenz} \Longrightarrow \text{Konvergenz}}$!

(Cauchy ist anwendbar, da
$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| \Big)$$

Umkehrung falsch: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$!

(2) bei endlichen Summen spielen Umordnungen keine Rolle. Bei Reihen ist das anders!

Satz 7.6 : Sei die $\boxed{\text{reelle}}$ Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gibt es zu jedem $\rho \in [-\infty, \infty]$ eine Umordnung, so dass die neue Reihe gegen ρ konvergiert bzw. bestimmt divergiert.

Beweis: Literatur (Kaballo, Analysis I p. 246, 32.6 Satz)
(aus der Habilitationsschrift von Riemann 1854)

Illustration

Sei $x := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$.

1.) Zeige: $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 + \overbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}^{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}_{<0} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right)}_{<0}$$

und

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \overbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}^{= 1/2} + \overbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}^{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)}_{>0}$$

2.) nun „ordne die Reihe um“

auf ein positives Glied folgen 2 negative

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$$

und setze Klammern

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} x \; !?$$

M. a. W.: Rechnet man wie mit endlichen Summen, so ergeben sich widersprüchliche Ergebnisse.

Bei absoluter Konvergenz geht dagegen alles gut:

Satz 7.7: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{C}$. Dann ist auch jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent mit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}}$$

Nimmt man Satz 7.6 u. 7.7 als bewiesen an, so folgt

$\boxed{\text{Satz 7.8}}$ (Umordnungssatz für reelle Reihen)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe. Dann gilt:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \iff \text{jede Umordnung konvergiert in } \mathbb{R}}$$

Beweis: „$\Longrightarrow$": Satz 7.7

„$\Longleftarrow$":

Annahme: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent

nach Voraussetzung (Umordnung $\sigma(k) := k$)

hat man Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$

nach Satz 7.6 (und die Annahme) existiert dann eine Umordnung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = \infty$$

(bestimmte Divergenz), Wspr. zur vorausgesetzten reellen Konvergenz jeder Umordnung. $\square$

Satz 7.8 gilt auch in $\mathbb{C}$: Kaballo, 32.8 Theorem, p. 247

Bewis von Satz 7.7 $\rightsquigarrow$

Skript p. 88+89

---

nun zum Produkt von Reihen

(ergibt später $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$!)

$\boxed{\text{Satz 7.9}}$ (Cauchy Produkt von Reihen)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ $\boxed{\text{absolut}}$

konvergent mit Gliedern aus $\mathbb{C}$.

Dann gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit der $\boxed{\text{absolut konvergenten}}$ Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \boxed{c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}}$$

Bem: Hier Summation o.E. ab „$n=0$"
als Überleitung zu „Potenzreihen".

Beweis: o. E. $a_n, b_n \in \mathbb{R}$

(sonst zerlege in Re, Im)

Fall 1: $a_k, b_k \geq 0$

bilde die Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad T_n := \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

$$U_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$$

Dann gilt

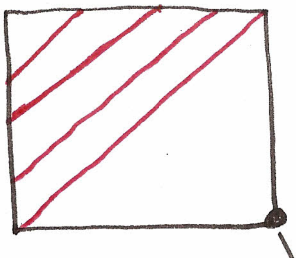
$$\underline{\underline{U_n}} \leq S_n \cdot T_n = \sum_{l,k=0}^{n} a_k b_l \leq \underline{\underline{U_{2n}}}$$

Begründung:

$$\begin{array}{cccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & \cdots & a_0 b_n \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n b_0 & \cdots & \cdots & a_n b_n \end{array}$$

$S_n \cdot T_n$ = Summe über das "Quadrat"

U_n = Summe über die Diagonalen



$a_n b_n$

$\Longrightarrow$ (1) $U_n \leq S_n T_n$, denn alle Summanden sind $\geqslant 0$